

H. Stachel

ZUR GRUPPE DER EBENEN BEWEGUNGEN

Der Schauplatz der folgenden Untersuchungen ist die *euklidische Ebene*  $E$ . Die Bewegungen von  $E$ , also die Abbildungen

$\varphi: E \rightarrow E$  mit  $\overline{A\varphi B\varphi} = \overline{AB}$  <sup>1)</sup> für alle  $A, B \in E$  bilden eine Gruppe, die *Bewegungsgruppe*  $B$  von  $E$ .

Beispiele für Bewegungen sind die *Geradenspiegelungen*. Diese sind *involutorisch*, d.h. für die Spiegelung  $\sigma_g$  an der Geraden  $g$  gilt

$$\sigma_g^2 = \text{id}_E, \sigma_g \neq \text{id}_E.$$

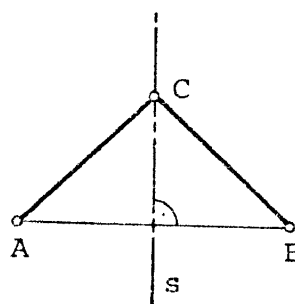
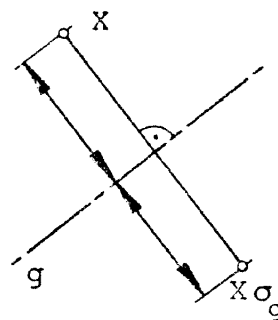
Die erste Gleichung läßt sich auch als  $\sigma_g^{-1} = \sigma_g$  schreiben.

Wir zeigen, daß diese Geradenspiegelungen ein Erzeugendensystem von  $B$  bilden. Dabei wird die Eigenschaft benützt, daß für je zwei Punkte  $A, B$  mit  $A \neq B$  genau eine Symmetrale  $s$  existiert mit  $B = A\sigma_s$ , und ferner für Punkte  $C$  gilt:

$$\overline{CA} = \overline{CB} \iff C \in s.$$

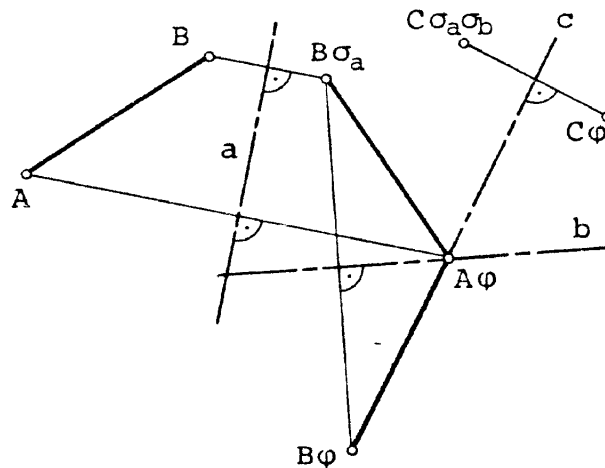
(1) Jedes  $\varphi \in B$  ist Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen.

Beweis: (i) Ist  $\varphi = \text{id}_E$ , so setzen wir  $\varphi = \sigma_g^2$  für beliebiges  $g$ .



<sup>1)</sup>  $A\varphi$  bezeichne das Bild von  $A$  in der Abbildung  $\varphi$ . Mit  $\overline{AB}$  wird die Distanz der Punkte  $A$  und  $B$  bezeichnet.

(ii) Bei  $\varphi \neq \text{id}_{\mathbb{E}}$  existiert ein Punkt  $A$  mit  $A \neq A\varphi$ ;  $a$  sei die Symmetrale von  $A$  und  $A\varphi$ . Dann gilt  $A\sigma_a = A\varphi$ . Nun ist entweder  $\varphi = \sigma_a$  oder



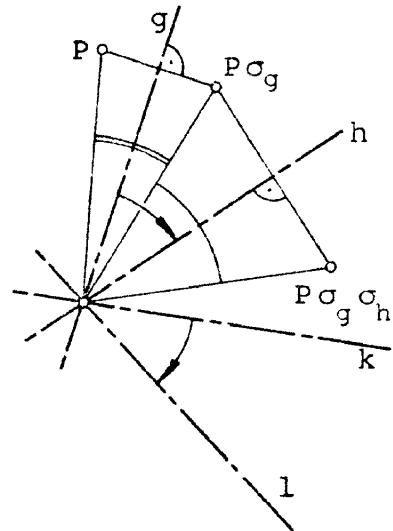
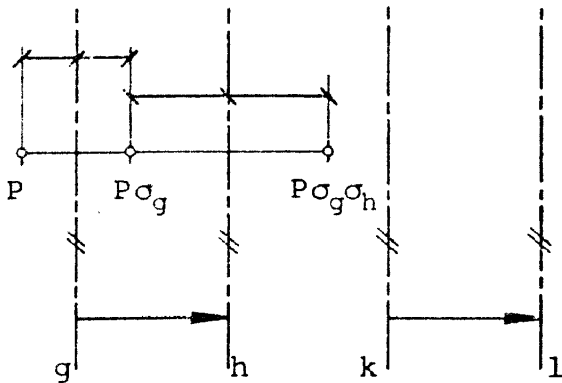
(iii) es existiert ein Punkt  $B$  mit  $B\sigma_a \neq B\varphi$ , womit  $B \neq A$  garantiert ist. Die Symmetrale  $b$  zu  $B\sigma_a$  und  $B\varphi$  muß wegen  $\overline{A\varphi B\varphi} = \overline{AB} = \overline{A\varphi B\sigma_a}$  den Punkt  $A\varphi$  enthalten. Also gilt  $A\sigma_a\sigma_b = A\varphi$ ,  $B\sigma_a\sigma_b = B\varphi$ . Entweder ist  $\varphi = \sigma_a\sigma_b$  oder  
 (iv) es existiert ein Punkt  $C$  mit  $C\sigma_a\sigma_b \neq C\varphi$ .  $c$  sei die Symmetrale. Wegen  $\overline{A\varphi C\varphi} = \overline{A\varphi C\sigma_a\sigma_b}$ ,  $\overline{B\varphi C\varphi} = \overline{B\varphi C\sigma_a\sigma_b}$  liegen  $A\varphi$  und  $B\varphi$  auf  $c$ ; dagegen ist  $C\varphi \notin c$ .

Folglich gilt für  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ :  $A \mapsto A\varphi$ ,  $B \mapsto B\varphi$ ,  $C \mapsto C\varphi$ . Angenommen, es existiert ein Punkt  $D$  mit  $D' = D\sigma_a\sigma_b\sigma_c \neq D\varphi$ . Dann müßte die Symmetrale zu  $D'$  und  $D\varphi$  mit derselben Begründung wie vorhin durch die Punkte  $A\varphi$ ,  $B\varphi$  und  $C\varphi$  hindurchgehen, und dies ist aber nicht möglich. Also bleibt  $\varphi = \sigma_a\sigma_b\sigma_c$ .

Das Produkt zweier Geradenspiegelungen  $\sigma_g\sigma_h$  ist bei parallelen  $g, h$  eine Translation normal zu diesen Geraden mit dem doppelten Normalabstand als Schiebstrecke, also mit dem Schiebvektor  $2\vec{gh}$ . Bei schneidenden Geraden  $g, h$  ist dieses Produkt eine Drehung um den Schnittpunkt durch

den orientierten Winkel  $2\Delta gh$ .

Daraus folgt unmittelbar



- (2) Dreispiegelungssatz:  $\sigma_g \sigma_h \sigma_l = \sigma_k \iff \sigma_g \sigma_h = \sigma_k \sigma_l \iff$   
 $\iff \left( \begin{array}{l} g, \dots, l \text{ sind parallel und es ist } \vec{gh} = \vec{kl} \text{ oder} \\ g, \dots, l \text{ sind kopunktal und es ist } \Delta gh = \Delta kl. \end{array} \right.$

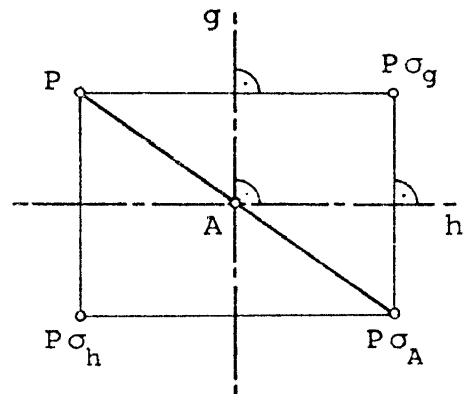
Sonderfall: Bei orthogonalen  $g$  und  $h$  ist  $\sigma_g \sigma_h$  die Drehung um den Schnittpunkt  $A$  durch  $180^\circ$ . Diese ist involutorisch und heißt *Punktspiegelung*  $\sigma_A$ . In diesem Fall ist

$$\sigma_g \sigma_h = (\sigma_g \sigma_h)^{-1} = \sigma_h \sigma_g.$$

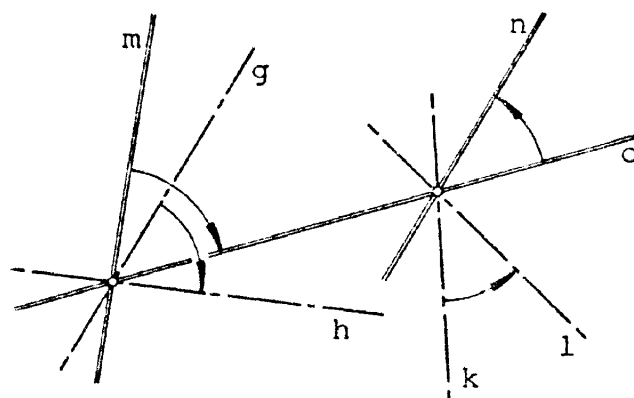
- (3) Reduktionssatz: Jedes Produkt von vier Geradenspiegelungen ist gleichzeitig Produkt zweier Geradenspiegelungen.

Beweis: Sei  $\varphi = \sigma_g \sigma_h \sigma_k \sigma_l$ :

- (i)  $g$  sei parallel zu  $h$  und  $k$  parallel zu  $l$ :



Nun ist  $\varphi$  Produkt zweier Translationen  $\sigma_g \sigma_h$  und  $\sigma_k \sigma_l$ , daher wieder eine Translation und in ein Produkt zweier Geradenspiegelungen zerlegbar.



(ii)  $g, h$  oder  $k, l$  seien schneidend: Nach (2) gibt es eine Gerade  $o$  mit  $\sigma_g \sigma_h = \sigma_m \sigma_o$  und  $\sigma_k \sigma_l = \sigma_o \sigma_n$ , woraus folgt:

$$\varphi = \sigma_m \sigma_o \sigma_o \sigma_n = \sigma_m \sigma_n.$$

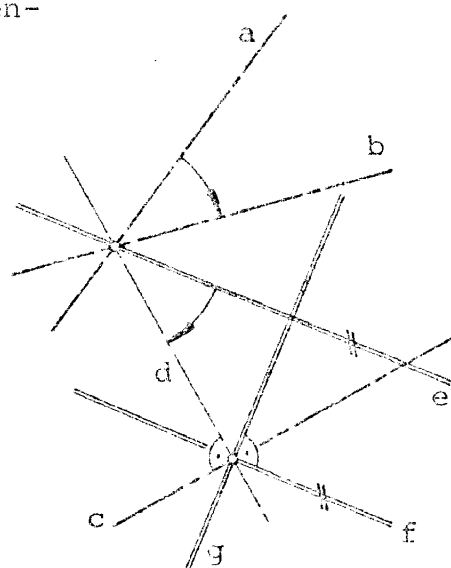
(4) Die Produkte von je zwei Geradenspiegelungen bilden eine Untergruppe von  $B$ , die Gruppe  $B_+$  der gleichsinnigen Bewegungen von  $E$ .

Beweis:  $B_+$  ist abgeschlossen, d.h.  $(B_+)^2 \subset B_+$ . Gleichzeitig ist stets auch  $(\sigma_a \sigma_b)^{-1} = \sigma_b \sigma_a \in B_+$ , womit  $B_+$  als Untergruppe bestätigt ist.

Wie sehen die Produkte dreier Geradenspiegelungen  $\varphi = \sigma_a \sigma_b \sigma_c$  aus?

(i) Bei parallelen  $a, b, c$  ist  $\varphi$  nach (2) wieder eine Geradenspiegelung.

(ii) Seien  $a, b$  schneidend: Die Normale aus dem Schnittpunkt  $(ab)$  zu  $c$  heiße  $d$ . Nun existiert eine Gerade  $e$  mit  $\sigma_a \sigma_b = \sigma_e \sigma_d$ , und es ist



$\varphi = \sigma_e \sigma_d \sigma_c$ . Gleichzeitig kann aber auch  $\sigma_d \sigma_c$  ersetzt werden durch das Produkt  $\sigma_f \sigma_g$ , wobei  $g$  normal zu  $e$  und  $f$  parallel zu  $e$  liegt. Also ist  $\varphi = \sigma_e \sigma_f \sigma_g = \sigma_g \sigma_e \sigma_f$  und Produkt aus einer Translation längs  $g$  und einer Spiegelung an  $g$  in beliebiger Reihenfolge. Jedes solche Produkt heißt *Gleitspiegelung* an  $g$ . Die reine Spiegelung an  $g$  ist ein Sonderfall einer Gleitspiegelung.

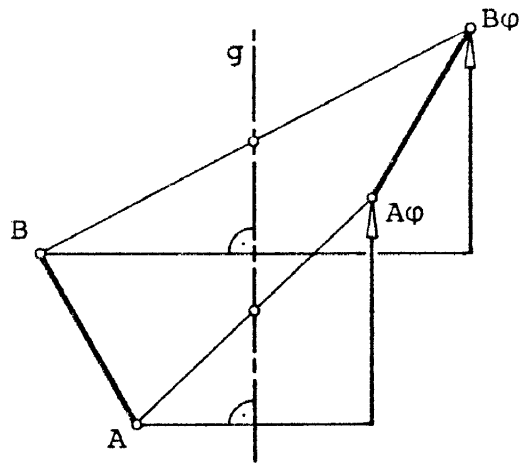
(iii) Bei parallelen  $a$  und  $b$ , jedoch schneidenden  $b$  und  $c$  ist  $\varphi^{-1} = \sigma_c \sigma_b \sigma_a$  von der obigen Bauart; also gilt allgemein

(5) *Jedes Produkt  $\varphi$  von drei Geradenspiegelungen ist eine Gleitspiegelung. Die Gleitspiegelungsachse enthält die Mittelpunkte aller Paare  $(A, A\varphi)$ .*

Die Tatsache, daß jede Gerade  $g$  Achse von genau einer Geradenspiegelung  $\sigma_g$  und jeder Punkt  $A$  Zentrum von genau einer Punktspiegelung  $\sigma_A$  ist, ermöglicht es, die Punkte und Geraden aus  $E$  mit diesen Spiegelungen zu identifizieren, also als involutorische Elemente der Bewegungsgruppe  $B$  von  $E$  aufzufassen. Aussagen über die gegenseitige Lage von Punkten oder Geraden werden so zu Aussagen über Spiegelungen, wie die folgenden drei Beispiele zeigen sollen:

(6)  *$g$  ist orthogonal zu  $h \iff \sigma_g \sigma_h \in I =$  Menge der involutorischen Bewegungen.*

Beweis: Die einzigen involutorischen Drehungen sind jene mit dem Drehwinkel  $180^\circ$ . Es gibt keine involutorischen Translationen.



(7)  $A \in g \iff \sigma_A \sigma_g \in I$ .

Beweis: Wir schreiben  $\sigma_A$  als  $\sigma_h \sigma_k$  mit  $k$  als Paralleler zu  $g$ .

Damit ist  $\sigma_A \sigma_g = \sigma_h \sigma_k \sigma_g$  eine Gleitspiegelung längs  $h$ .

Daher gilt

$$\sigma_A \sigma_g \in I \iff k=g \text{ und } \sigma_A \sigma_g = \sigma_h .$$

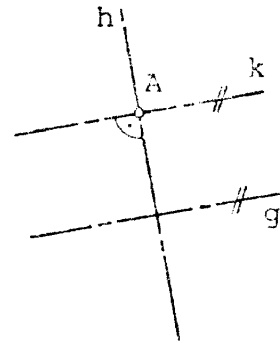
(8)  $g, h, k$  gehen durch denselben Punkt oder sind

parallel  $\iff \sigma_g \sigma_h \sigma_k \in I$ .

Beweis:  $\varphi = \sigma_g \sigma_h \sigma_k$  ist eine

Gleitspiegelung; daher gilt

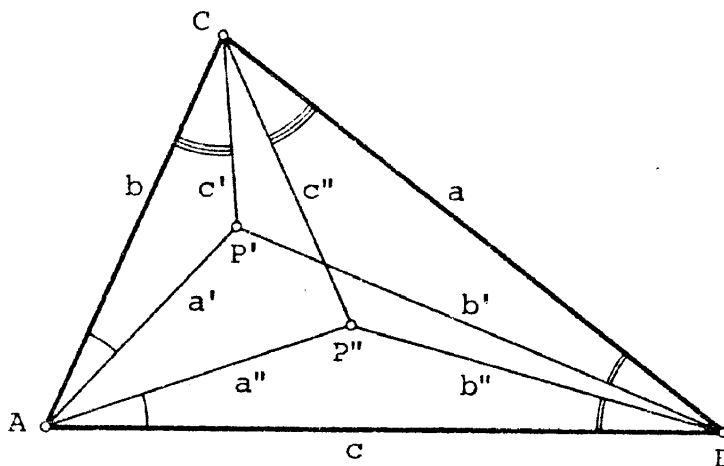
$\varphi \in I \iff \varphi = \sigma_1$ . Rest nach (2).



Beispiel 1:

Der Beweis des folgenden Satzes zeigt, wie eine geometrische Aussage durch Rechnen mit Spiegelungen beweisbar sein kann:

(9) Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$ ; die Geraden  $a', a''$  durch  $A$  seien symmetrisch bezüglich der durch  $A$  gehenden Winkelsymmetralen von  $ABC$ . Analog  $b', b''$  bzw.  $c', c''$ : Gehen die Geraden  $a', b', c'$  durch einen Punkt  $P'$  ( $\neq A, B, C$ ) oder sind sie parallel, so gilt dies auch für  $a'', b'', c''$ . Ist  $P''$  der gemeinsame Punkt von  $a'', b'', c''$ , so heißt die Abbildung  $P' \mapsto P''$  isogonale Verwandtschaft bezüglich des Dreiecks  $ABC$ .



Beweis: Aus (2) folgt  $\sigma_b \sigma_a = \sigma_a'' \sigma_c$ . Daher gilt

$$\sigma_a'' = \sigma_b \sigma_a \sigma_c, \quad \sigma_b'' = \sigma_c \sigma_b \sigma_a, \quad \sigma_c'' = \sigma_a \sigma_c \sigma_b.$$

Mit (8) können wir  $\varphi = \sigma_a \sigma_b \sigma_c \in I$  voraussetzen.

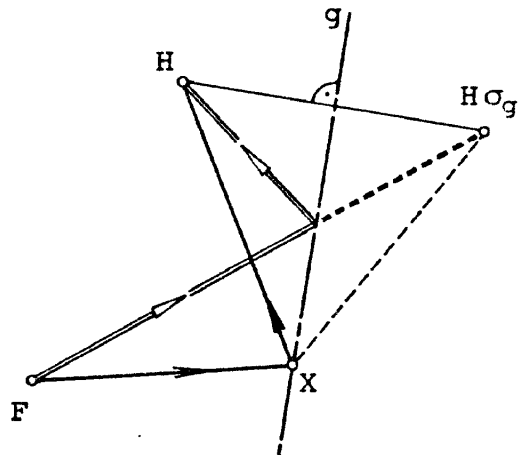
Damit ist nun aber auch  $\sigma_a'' \sigma_b'' \sigma_c'' = \sigma_b \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_b \in I$ , denn wegen  $\varphi \neq \text{id}_E$  ist auch  $\sigma_b \varphi \sigma_b \neq \text{id}_E$ ; andererseits aber ist  $(\sigma_b \varphi \sigma_b)^2 = \sigma_b \varphi^2 \sigma_b = \text{id}_E$ .

Im folgenden Teil werden nun einige weitere Aufgaben und Sätze - auch aus der Dreiecksgeometrie - zusammengestellt, bei welchen Bewegungen als Hilfsmittel in den Beweisen dienen:

### Beispiel 2:

*Feuerwehrproblem:* Die Feuerwehr muß vom Rüsthaus (= Punkt F) zum brennenden Haus (=H) fahren, aber zuvor am Bach (= Gerade g) Wasser holen. Wie verläuft der kürzeste Weg ?

Sei X die Stelle am Bach. Da für den zweiten Teil des Weges  $\overline{XH} = \overline{X H \sigma_g}$  gilt, erhalten wir nach der Dreiecksungleichung, daß der Gesamtweg mindestens die Länge  $\overline{F H \sigma_g}$  haben muß. Nun ist aber auch unmittelbar einzusehen, für welchen Punkt X das Minimum erreicht wird.

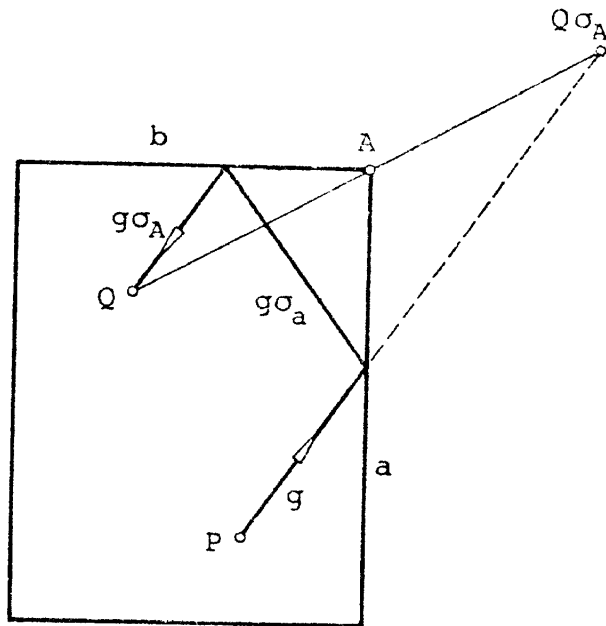


### Beispiel 3:

Ein Problem vom *Billardspiel*:

Wie ist die Kugel vom Punkt P abzustößen, damit sie nach Spiegelung an den Rändern a und b nach Q kommt ?

Sei g die (nach beiden Seiten verlängerte) Anfangsbahn der Kugel. Dann gilt  $P \in g, Q \in g \sigma_a \sigma_b = g \sigma_A$ , folglich  $Q \sigma_A \in g$ . g ist also die Verbindungsgerade von P und  $Q \sigma_A$ .



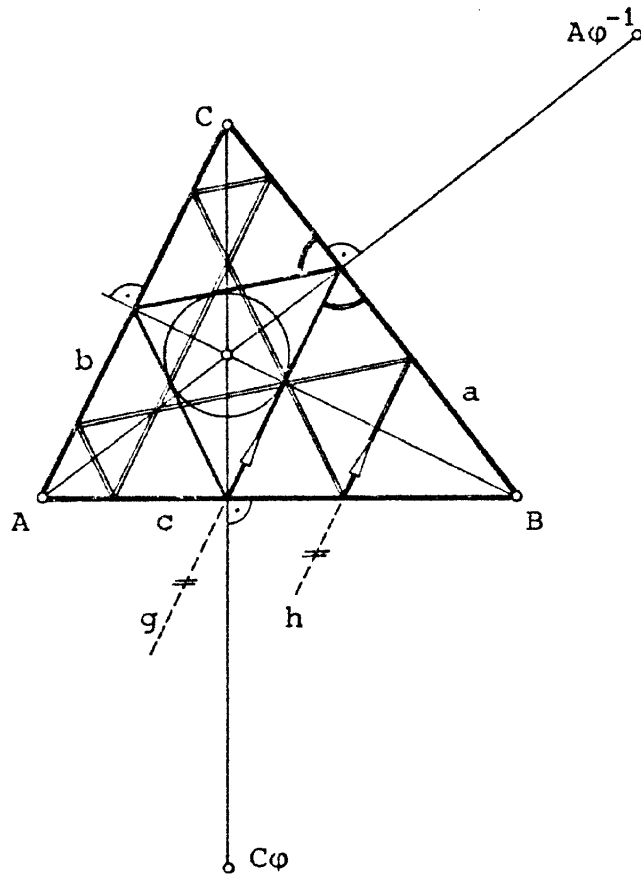
Beispiel 4:

Nun soll ein Billardtisch in Form des spitzwinkligen Dreiecks ABC verwendet werden. Ist es möglich, die Kugel so zu stoßen, daß sie nach Spiegelung an den Dreiecksseiten a, b und c wieder ihre Anfangsbahn g erreicht ?

Für g muß  $g\sigma_a\sigma_b\sigma_c = g$  gelten. g ist somit eine Fixgerade der Bewegung  $\varphi = \sigma_a\sigma_b\sigma_c$ . Da die drei Seiten keinen gemeinsamen Punkt haben, ist  $\varphi$  nach (2) eine nichtinvolutorische Gleit-  
spiegelung. Deren einzige Fixgerade ist die Gleitspiegelungs-  
achse. Diese verbindet die Mitten der Punktepaare C, C $\varphi$   
sowie A $\varphi^{-1}$ , A, verbindet also zwei Höhenfußpunkte. Die einzig  
mögliche geschlossene Bahn der gewünschten Art ist somit  
durch die Seiten des Höhenfußpunktdreiecks von ABC gegeben.

Aus den bei den Spiegelungen auftretenden gleichen Winkeln ist unmittelbar zu ersehen, daß der Höhenschnittpunkt von ABC Inkreismittelpunkt des Fußpunktdreiecks ist; die Ankreismitteln des Fußpunktdreiecks fallen in die Ecken A, B und C des Ausgangsdreiecks.





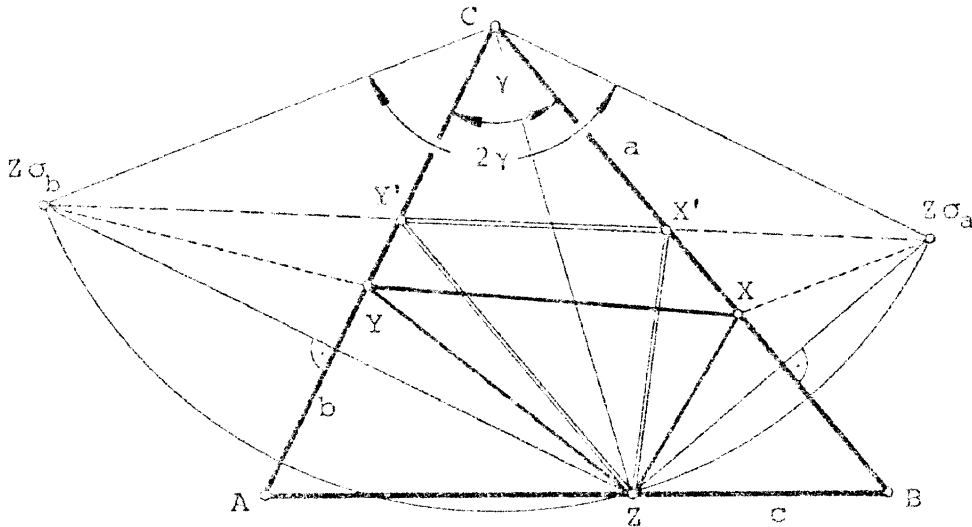
Gibt es Bahnen, die sich nach zwei Umläufen schließen ?  
 Für die Anfangsbahn  $h$  muß  $h\varphi^2 = h$  gelten. Dabei ist  $\varphi^2$   
 eine Translation längs  $g$ , woraus als notwendige Bedingung  
 folgt, daß  $h$  parallel zu  $g$  anzunehmen ist. Allerdings muß  
 $h$  hinreichend nach bei  $g$  gewählt werden, damit tatsächlich  
 die Spiegelungsachsen  $a, b, c$  in der geforderten Reihen-  
 folge getroffen werden.

Beispiel 5:

(10) Bei einem spitzwinkligen Ausgangsdreieck  $ABC$  ist das  
 Fußpunktdreieck unter allen eingeschriebenen Drei-  
 ecken jenes mit dem kleinsten Umfang.

Beweis: Seien  $X, Y$  und  $Z$  die Ecken eines eingeschriebenen  
 Dreiecks;  $Z$  liege auf der Seite  $c$ . Wir spiegeln  $Z$  an den  
 Seiten  $a$  und  $b$  und erhalten - ähnlich wie im Beispiel 2:

$$\overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} \geq \overline{Z\sigma_a Z\sigma_b}.$$



Für die auf der Verbindungsgeraden  $[Z\sigma_a Z\sigma_b]$  gelegenen Punkte  $X'$  von  $a$  und  $Y'$  von  $b$  besteht Gleichheit. Dabei gehen die Geraden  $[ZX']$  und  $[X'Y']$  durch Spiegelung an  $a$  auseinander hervor.

$Z\sigma_a$  geht durch  $\sigma_a \sigma_b$  in  $Z\sigma_b$  über. Nun ist  $\sigma_a \sigma_b$  die Drehung um  $C$  durch den Winkel  $2\gamma$  mit  $\gamma = \angle ab$ . Also gilt

$$\overline{Z\sigma_a Z\sigma_b} = 2 \overline{CZ} \sin \gamma.$$

Die Distanz  $\overline{Z\sigma_a Z\sigma_b}$  ist demnach genau dann minimal, wenn  $\overline{CZ}$  minimal ist, also  $Z$  in den Höhenfußpunkt auf  $c$  fällt.

Die zugehörigen Ecken  $X'$  und  $Y'$  sind dann gleichfalls Höhenfußpunkte.

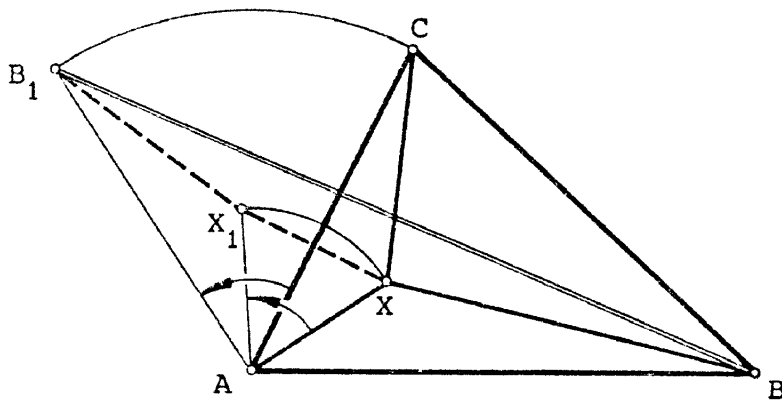
Bemerkung: Bei einem in  $C$  stumpfwinkeligen Ausgangsdreieck fallen die auf  $a$  und  $b$  gelegenen Ecken des Dreiecks mit minimalem Umfang mit  $C$  zusammen; das Lösungsdreieck ist also ausgeartet.

Beispiel 6:

Ein ähnliches Minimalproblem lautet: Für welchen Punkt  $T$  ist die Summe der Abstände von den Ecken  $A, B, C$  eines Dreiecks minimal ?

Wir beschränken uns wieder auf ein spitzwinkeliges Dreieck.

Sei  $X$  ein beliebiger Punkt der Ebene. Wir drehen  $X$  und  $C$  um  $A$  durch  $60^\circ$  zu  $X_1$  bzw.  $B_1$  nach außen.

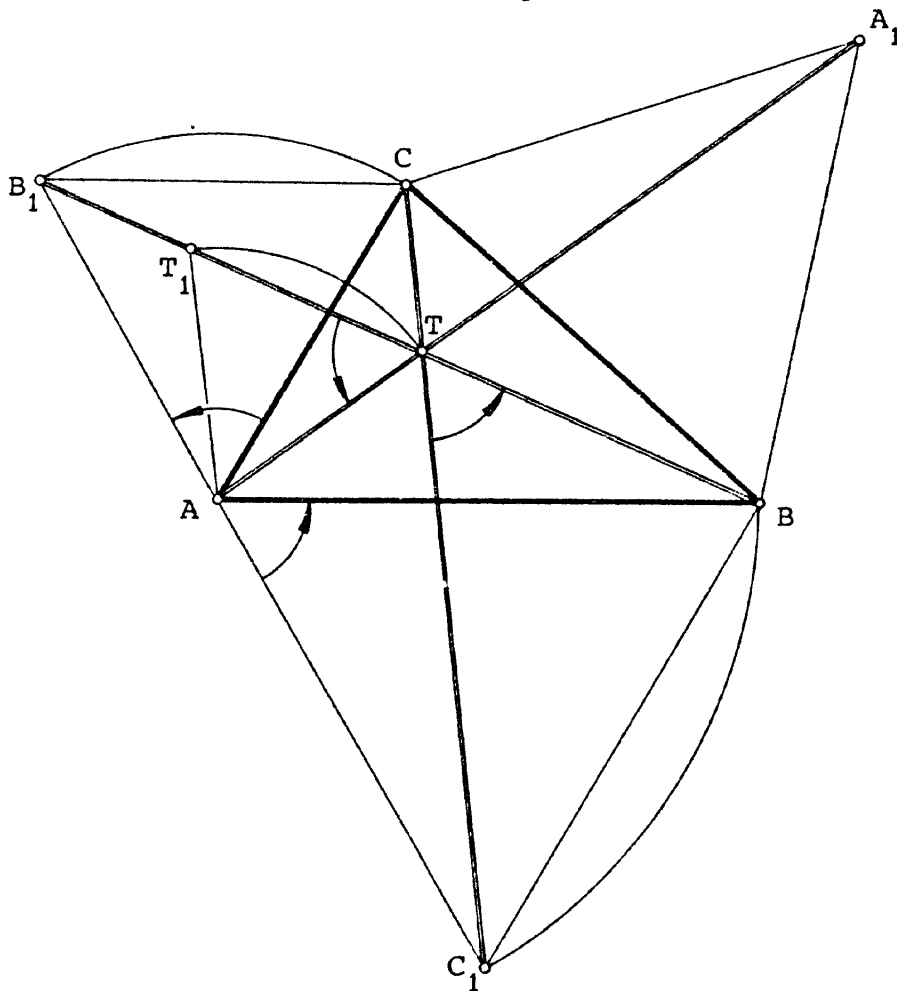


Dann gilt  $\overline{XA} = \overline{XX_1}$  und  $\overline{XC} = \overline{XB_1}$ , daher nach der Dreiecksungleichung

$$\overline{AX} + \overline{BX} + \overline{CX} \geq \overline{BB_1} .$$

Soll für einen Punkt X Gleichheit gelten, so muß X auf der Geraden  $[BB_1]$  liegen. Nach Änderung der Bezeichnung folgt, daß X auch  $[CC_1]$  angehören muß.

Sei T der Schnittpunkt der Geraden  $[BB_1]$  und  $[CC_1]$ . Eine Drehung um A durch  $60^\circ$  bringt



$C_1$  nach B und C nach  $B_1$ . Daher geht  $T \in [CC_1]$  in einen Punkt  $T_1 \in [BB_1]$  über. Bei einem spitzwinkligen Dreieck ABC liegt  $T_1$  zwischen T und  $B_1$ . Daher wird für T das Minimum tatsächlich erreicht.

T liegt damit auch auf  $[AA_1]$ . Der mittels dieser nach außen gelegten gleichseitigen Dreiecke konstruierte Punkt T heißt *Toricellischer Punkt* von ABC.

(11) (TORICELLI, 1659) *Bei einem spitzwinkligen Ausgangsdreieck ABC ist der Toricellische Punkt T derjenige, für welchen  $\overline{TA} + \overline{TB} + \overline{TC}$  minimal ist.*

Die obige Figur zeigt, daß die Verbindungsgeraden von T mit den Punkten A, B und C durch Drehungen um  $60^\circ$  auseinander hervorgehen.

Bei einem ungleichseitigen Dreieck ABC gibt es noch einen zweiten Punkt mit dieser Winkeleigenschaft; er entsteht, wenn die gleichseitigen Aufsatzdreiecke nach der anderen Seite gelegt werden.

Bemerkung: Der obige Beweis bleibt richtig, solange kein Innenwinkel größer als  $120^\circ$  ist. Andernfalls liegt T außerhalb des Dreiecks; der Streckenzug  $B, T, T_1, B_1$  ist überschlagen. Dann hat die Ecke mit dem stumpfen Innenwinkel die geforderte Minimaleigenschaft.

#### Beispiel 7:

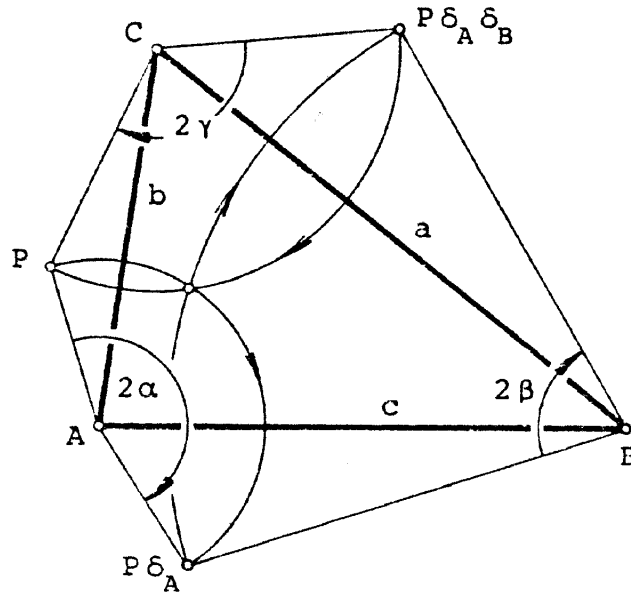
(12) *Im Dreieck ABC seien  $\alpha, \beta, \gamma$  die orientierten Innenwinkel, also  $\alpha = \sphericalangle CAB$ ,  $\beta = \sphericalangle ABC$ ,  $\gamma = \sphericalangle BCA$ .  $\delta_A$  sei die Drehung um A durch  $2\alpha$ ; analog  $\delta_B, \delta_C$ . Dann gilt*

$$\delta_A \delta_B \delta_C = \text{id}_E .$$

Beweis: Für die Dreiecksseiten a, b, c gilt nach (2)

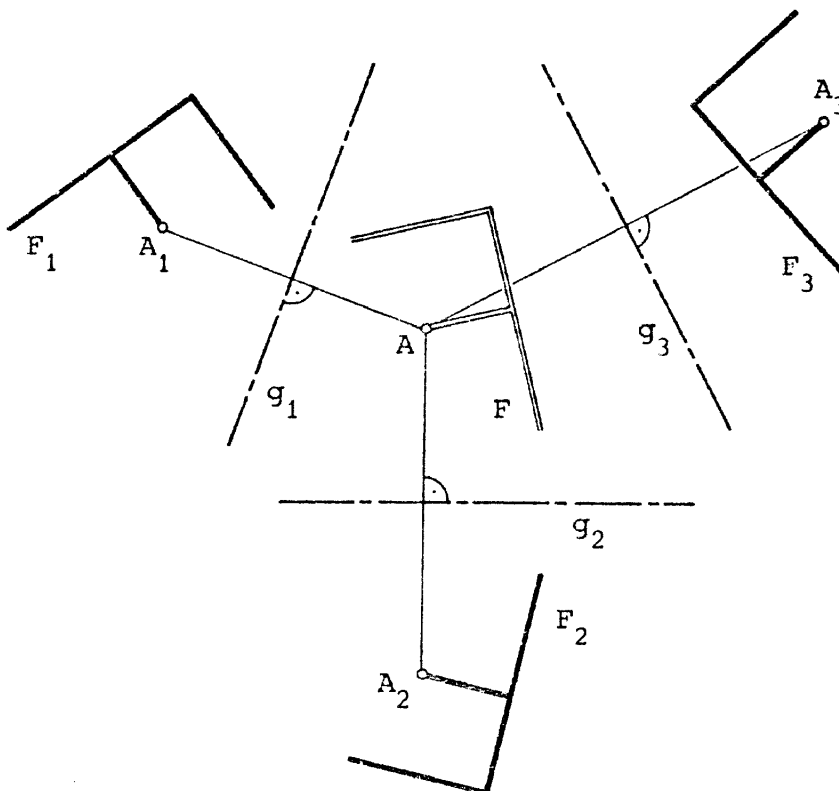
$$\delta_A = \sigma_b \sigma_c , \delta_B = \sigma_c \sigma_a , \delta_C = \sigma_a \sigma_b$$

(siehe Figur auf Seite 13).



Beispiel 8:

(13) Satz von STEPHANOS (1881): Zu je drei in derselben Ebene gelegenen gleichsinnig kongruenten Figuren  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , die nicht alle durch Translationen auseinander hervorgehen dürfen, gibt es eine Figur  $F$ , die zu  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  je spiegelbildlich liegt.



Beweis: Es gibt eine Drehung oder Translation  $\delta_{12}$ , die  $F_1$  nach  $F_2$  bringt, und ebenso ein  $\delta_{23}$  mit  $F_2 \mapsto F_3$ . Beschränken wir uns auf den Fall zweier Drehungen:  $g_2$  sei eine Gerade, die beide Drehzentren  $P_{12}$  und  $P_{23}$  enthält. Dann gibt es nach (2) ein  $g_1$  und ein  $g_3$  mit

$$\delta_{12} = \sigma_{g_1} \sigma_{g_2}, \quad \delta_{23} = \sigma_{g_2} \sigma_{g_3}.$$

Nun gilt  $F_1 \sigma_{g_1} \sigma_{g_2} = F_2$ ,  $F_2 \sigma_{g_2} \sigma_{g_3} = F_3$ , also

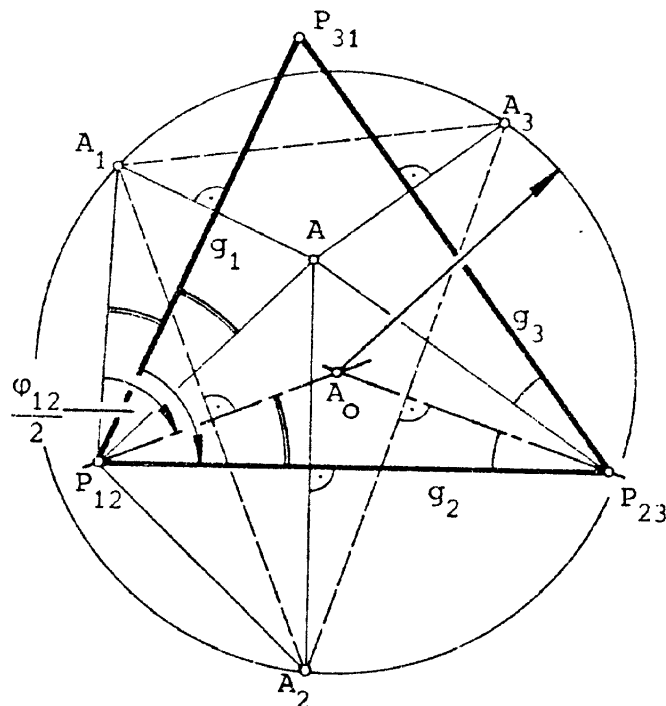
$$F_1 \sigma_{g_1} = F_2 \sigma_{g_2} = F_3 \sigma_{g_3},$$

und diese Bildfigur nennen wir  $F$ . Dann liegt  $F$  zu  $F_i$  für  $i=1,2,3$  bzgl.  $g_i$  symmetrisch.

Beispiel 9:

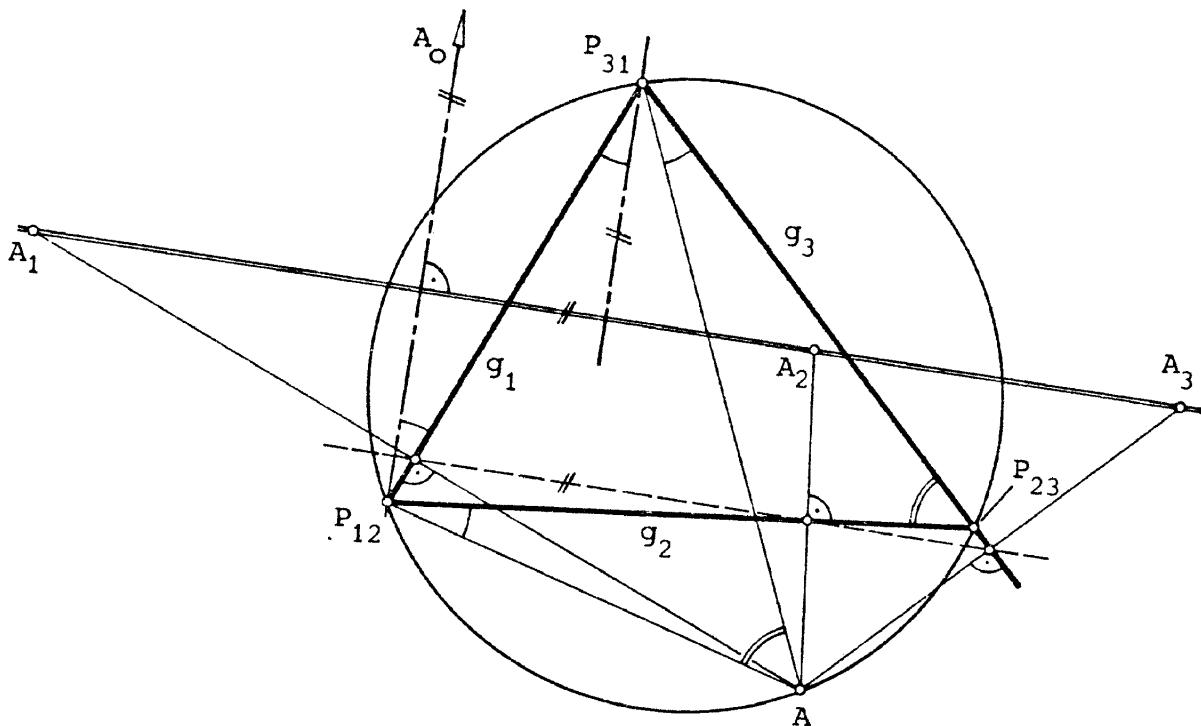
Jeder mit der Figur  $F$  verbundene Punkt  $A$  liefert, an  $g_1, g_2, g_3$  gespiegelt, drei Lagen  $A_1, A_2, A_3$ , die auf die gleiche Weise mit den Figuren  $F_1, F_2, F_3$  verknüpft sind. Gibt es Fälle, wo diese Punkte auf einer gemeinsamen Geraden, also kollinear liegen oder ein gleichseitiges Dreieck bilden? Wir setzen voraus, daß die Spiegelungsachsen  $g_1, g_2, g_3$  ein Dreieck  $P_{12} P_{23} P_{31}$  bilden:

Die Symmetrale zu  $A_1$  und  $A_2$  geht durch  $P_{12}$ . Ist  $\varphi_{12}$  der Drehwinkel von  $\delta_{12}$ , so bringt die Drehung um  $P_{12}$  durch den Winkel  $\varphi_{12}/2$  die Gerade  $[P_{12}A_1]$  mit der Symmetralen zur Deckung und gleichzeitig  $g_1$  nach  $g_2$ . Damit sind gleiche Winkel ablesbar, die zeigen (vgl. (9)):



- (14) Bilden die Spiegelpunkte  $A_1, A_2, A_3$  des Punktes  $A$  ein Dreieck, so liegt dessen Umkreismittelpunkt  $A_0$  isogonal zu  $A$  bezüglich des von den Spiegelachsen gebildeten Dreiecks  $P_{12}P_{23}P_{31}$ .

Kollineare Lage von  $A_1, A_2, A_3$  setzt parallele Symmetralen voraus. Wegen dabei auftretender gleicher Winkel folgt nach dem Peripheriewinkelsatz



- (15)  $A_1, A_2, A_3$  liegen kollinear  $\iff A$  liegt auf dem Umkreis des Dreiecks  $P_{12}P_{23}P_{31}$ .

Liegen  $A_1, A_2, A_3$  kollinear, so auch die Fußpunkte der aus  $A$  auf die Dreiecksseiten  $g_i$  legbaren Normalen. Damit führt (15) auf die Aussage eines Satzes von WALLACE (1797).

Beachten wir schließlich, daß die Geraden  $[A_1A_2], \dots$  auf den Symmetralen  $[A_0P_{12}], \dots$  je normal stehen, so erkennen wir

- (16) Wird der zum Toricellischen Punkt  $A_0$  isogonale Punkt  $A$  an den Seiten des zugrundeliegenden Dreiecks  $P_{12}P_{23}P_{31}$  gespiegelt, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck  $A_1A_2A_3$ .